

Διαγώνισμα Γ' Λυκείου
Μαθηματικά προσανατολισμού
26/03/22
Διάρκεια: 3 ώρες

Εισηγητής: Κ. Μπερτσιάς

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο το $f(x_0)$;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα *Fermat*

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

β. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις δεν έχουν ασύμπτωτες.

γ. Αν για τις συνεχείς συναρτήσεις στο \mathbb{R} ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε x στο \mathbb{R} , τότε $f(x) = g(x)$, για κάθε x στο \mathbb{R} .

δ. Κρίσιμα σημεία της f στο Δ , λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της ισούται με μηδέν.

ε. Αν η συνάρτηση g είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο \mathbb{R} , τότε $g''(x) > 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{x^2+4}{x}$ για κάθε $x > 0$.

B1. Να μελετήσετε τη g , ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

B2. Να προσδιορίσετε, τα διαστήματα που η g είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_g

Μονάδες 6

B4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^5 + 2bx + 3$, με a και $b \in \mathbb{R}$, η οποία στο $x_0 = 2$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο ίσο με -125 .

Γ1. Να δείξετε ότι: $a = 1$ και $b = -40$

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$e^x - e^{\frac{60x+128}{x^4-20}} = 0$$

Μονάδες 5

Γ4. Να λύσετε στο διάστημα $(2, +\infty)$ την ανίσωση: $f(e^x + x - e^3) - 6 < 0$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται μια παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f , για την οποία ισχύει ότι $f(x) + xf'(x) = \frac{x+1}{x}$, για κάθε $x > 0$ και ότι $f(1) = 2$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x) - x - \ln x$, είναι σταθερή για $x > 0$ και να βρείτε τη συνάρτηση f .

Μονάδες 7

Αν $f(x) = \frac{x + \ln x + 1}{x}$, τότε:

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Μονάδες 4

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) - e^x = x^2 e^x - 2x e^x + 2$

Μονάδες 5

Δ4. Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της C_f

Μονάδες 4

Δ5. Να δείξετε ότι: $f(x) \geq f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$ για κάθε $x \geq \sqrt{e}$

Μονάδες 5