Γ. Κονδύλη 1 & Όθωνος, Μαρούσι | 210 61 24 000
www.akadimos.gr | fb:@akadimos.marousi | tw:@Akadimos

Διαγώνισμα Γ΄ Λυκείου
Μαθηματικά Προσανατολισμού
20/11/21
Διάρκεια: 3 ώρες

Εισηγητής: *Κ. Μπερτσιάς*

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση *f,* η οποία είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\eta.$$

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα σε κάθε γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, με $x_0\in A_f$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

β. Η εικόνα *f(Δ)* ενός διαστήματος Δ μέσω μιας μη σταθερής συνάρτησης *f,* είναι διάστημα.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

δ. Αν μια συνάρτηση f, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της είναι το $[f(\alpha), f(\beta)]$.

ε. Αν μια συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σ' ένα διάστημα Δ, τότε η f είναι συνεχής στο Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f: R \to R$ μια συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lambda \in R$$

Β1. Να βρείτε το $f(0)$

Μονάδες 8

Β2. Να βρείτε το λ, ώστε $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x+2xf(x)}{x^2+\eta\mu x\cdot f(x)} = 3$

Μονάδες 8

Β3. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [1,3]$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $f(x_0) = \frac{f(1)+3f(3)}{4}$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: R \to R$ μια συνεχής συνάρτηση.

Γ1. Αν ισχύει $1 < f(x) < e$ για κάθε $x \in [0,1]$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Μονάδες 5

Γ2. Αν η γραφική παράσταση C_f περνά από τα σημεία Α(-2,4) και Β(5,-1), τότε να δείξετε ότι αυτή τέμνει την ευθεία $y = 2x + 1$, σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-2,5)$.

Μονάδες 6

Γ3. Αν ισχύει ότι $f(\alpha) + f(3\alpha) = 4\alpha$, με $\alpha > 0$, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-a)(f(x)-a) = (x-3a)(f(x)-3a)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,3α].

Μονάδες 7

Γ4. Έστω επιπλέον η συνάρτηση g , συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\gamma,\delta]$. Αν ισχύει $\gamma < f(x) < \delta$ για κάθε $x\in[\gamma,\delta]$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\gamma,\delta)$:

$$(g \circ f)(x_0) + x_0 = f(x_0) + g(x_0)$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, για την οποία ισχύει ότι $f^2(x) = 1 + 2xf(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, με $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - 2021 = 0$ έχει μοναδική λύση.

Μονάδες 9

Δ3. Για κάθε $\alpha, \beta \in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f(\beta)}{x-2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2).

Μονάδες 7