

Τάξη: Γ' Γυμνασίου (Αριστείας)
Εξεταζόμενο μάθημα: Μαθηματικά
Ημερομηνία: 20/11/2021
Διάρκεια: 2 ώρες
Εισηγητές: Παπαβασιλείου Λυδία
Μπρανίκας Πάνος

ΘΕΜΑ 1

A. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$.

Μονάδες 5

B. Να δώσετε τον ορισμό της ταυτότητας.

Μονάδες 5

Γ. Να δώσετε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζα ενός θετικού αριθμού x .

Μονάδες 5

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

- (i) Ο αριθμός $\sqrt{20}$ είναι διπλάσιος του $\sqrt{10}$.
- (ii) Ισχύει ότι $(-\alpha - \beta)^2 = -(\alpha + \beta)^2$.
- (iii) Αν γνωρίζουμε ότι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα, τότε το πολυώνυμο $R(x) = P(x) - Q(x)$ δεν έχει βαθμό.
- (iv) Ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{2}$ έχει τη μορφή κλάσματος, άρα είναι ρητός.
- (v) Οι αριθμοί $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ και $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ είναι αντίστροφοι.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2

A. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (2x^2 - x + 1)(x - x^2 - 1)$.

- (i) Να γράψετε το $P(x)$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρείτε τον βαθμό του.

Μονάδες 7

- (ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \sqrt{\sqrt{P(-1) - P(2)} - P(0)}$.

Μονάδες 8

B. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

(i) $(x - 1)^3 + 3(x + 1)^2 + x(x - 3)(x + 3) = 2x^3 + 2$

(ii) $x(x - 3y)^2 - (x + y)^3 = -y(-3x + y)^2$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ο αριθμός:

$$\alpha = (3 + 2\sqrt{3})^2 - \frac{(\sqrt{22} - 2)(\sqrt{22} + 2)}{\sqrt{12} - 3}$$

A. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

Μονάδες 7

B. Αν ισχύει ότι $x + \frac{1}{x} = \alpha$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

Μονάδες 8

(ii) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα πολυώνυμα:

- $P(x) = x(x + 1)^2 + (x - 3)^2$
- $Q(x) = x^3 - 8x + 16$

A. Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 9$.

Μονάδες 7

B. Να αποδείξετε ότι $P(\alpha - 2) = Q(\alpha - 1)$, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α .

Μονάδες 8

Γ. Δίνεται ο αριθμός:

$$\kappa = \frac{1 + P(98) - Q(99)}{\sqrt{45} - \sqrt{Q(-1)} - \sqrt{Q(1)} + 2}$$

Να αποδείξετε ότι $\kappa = \sqrt{5} - 2$.

(Σημείωση: Χρησιμοποιήστε το συμπέρασμα του ερωτήματος Β.)

Μονάδες 10