

Εισηγητής: Τσανίδης Κωνσταντίνος

Ημερομηνία: 22/02/2020

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

*Μονάδες 8*

**A2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο  $f(x)=\ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  και ότι  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ .

*Μονάδες 7*

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λάθος.

i. Αν η  $f''$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f''$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

ii. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $f(x) > 0$  τότε  $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)}$

iii.  $(x^x)' = x^x \ln x$ ,  $x > 0$

iv. Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της όταν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

v. Η ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή  $t_0$  είναι η δευτερη παράγωγος της συνάρτησης θέσης  $x = s(t)$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ .

*Μονάδες 10*

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x + a, & x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x - 1}$

**Μονάδες 8**

**B2.** Να βρείτε το  $a$ , ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0=1$

**Μονάδες 8**

**B3.** Για  $a=-1$ , να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1,2)$  τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $A(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στον  $x'x$ .

**Μονάδες 9**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Αν η γραφική παράσταση της  $f^{-1}$  διέρχεται από τα σημεία  $A(6,1)$  και  $B(2,3)$ , να λύσετε την εξίσωση:  $f^{-1}(4+f(x^2-1))=1$ .

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (1,3)$  τέτοιο ώστε  $\frac{f(\xi)}{f'(\xi)} = -\xi$ .

**Μονάδες 9**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ .

**Δ1.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  που διέρχεται από το σημείο  $A(0,-1)$

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $g$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = -x + 2019$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f, g$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Ένα κινητό  $M$  ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης,  $C_g$   $x \geq 0$ . Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης  $x$

του  $M$  είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής του  $y$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$

**Μονάδες 6**

Ακάδημος