ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Εισηγητής: Ανδριώτης Δημήτρης **Ημερομηνία: 20/01/2020**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; ***ΜΟΝΑΔΕΣ 3***

Α2. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε να αποδείξετε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε να είναι $f(x_0)=\eta$

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0,2], τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=f(0)$

γ) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell\Leftrightarrow\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=\ell$

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [0,3] και το $x_0 \in (0,3)$ είναι ρίζα της f, τότε σε κάθε περίπτωση η f αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε και η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής στο x_0

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = x^2 - 7x,\ x \in [-7,11)$$

$$g(x) = x^2 + 2,\ x \in [-12,0)$$

Β1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και gof

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Β2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x+4}-2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημ(7x)}{f(x)}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{συν(3x)}{g(x)}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ είναι συνεχής, με $f(0)=1$ και ισχύει:

$$f^2(x) - 2ημx f(x) = x^2 + συν^2 x,\ \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - ημx,\ x \in \mathbf{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = π$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^4 + f'(0)x^3 + x^2 - 2x + f''(0) = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1)

<u>ΜΟΝΑΔΕΣ 6</u>

Γ4 Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_o \in (0,2)$ έτσι ώστε

$$2f(0)+3f(1)+5f(2)=10f(x_0)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπους:

α) $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x - x\etaμx & , \ x \geqslant 0 \\ x^2 + xσυνx, & x < 0 \end{cases}}$ β) $\mathbf{f(x) = |x|x^2 + 1}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Δ2. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $\mathbf{f(x) = \begin{cases} αx^2 + βx + 1 \ , & x \geq 1 \\ x^3 + 2β & , \ x < 1 \end{cases}}$. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x_0 = 1}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Δ3. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\mathbf{e^{xf(x)-1} = x}$ για κάθε $\mathbf{x > 0}$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x}$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(e) + ef'(e) = \dfrac{1}{e}}$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης $\mathbf{C_f}$ της f στο σημείο με τετμημένη $\mathbf{x_0 = \dfrac{1}{e}}$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη είναι κάθετη στην εφαπτομένη της $\mathbf{C_f}$ στο σημείο με τετμημένη $\mathbf{x_1 = e}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 9