

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Επιμέλεια θεμάτων: Κ.Ι.Μπερτσιάς

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα σε κάθε γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$

β) Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

γ) Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο (α, β) , τότε η f παίρνει στο (α, β) μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$

ε) Ισχύει ότι: $\int_2^3 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_2^3$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=x^2-\alpha x +9$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x_1=0$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$ και το πρόσημό της.

Μονάδες 7

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(g(x)) = \ln(x^2 + 9)$, ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

B4. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 4$, είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \frac{1}{f(g(x))} - 4 + x$, στο $-\infty$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (x - 2)^2 e^x - 4$, με $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4e^{-x} - x^2 + 4x = 4$, έχει ακριβώς δύο λύσεις στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6

Γ3. Έστω, επιπλέον, η συνάρτηση $h(x) = (x - 2)e^x + 2x$. Να βρείτε πόσες εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της h , διέρχονται από το σημείο $M(2,0)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση: $(\alpha^2 + 1)^2 e^{\alpha^2+3} < 9e^5$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής στο R συνάρτηση f και μια παράγουσά της F , περιττή συνάρτηση, για τις οποίες ισχύει $f(0) = F(0) = 0$.

Θεωρούμε, επίσης, την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση g , για την οποία ισχύει ότι

$$g(x) = \frac{f(x) - (e^x - 1)g'(x)}{e^x}, \text{ με } x \in R$$

Δ1. Να δείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Μονάδες 8

Δ2. Να δείξετε ότι $g(x) + F(x) = g(-x)$ για κάθε $x \in R$.

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^2 xf(x)dx$

Μονάδες 7

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, t)$ τέτοιο, ώστε:

$$t[e^\xi(f(\xi) - F(\xi)) - f(\xi)] = g(t)(e^\xi - 1)^2$$

Μονάδες 6