Γ.Κονδύλη 1 & Όθωνος-Μαρούσι
Τηλ. Κέντρο:210-61.24.000, http://www.akadimos.gr

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιμέλεια θεμάτων: Κ.Ι.Μπερτσιάς

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και ισχύει

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σ᾽ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το 1^{o} θεώρημα $\left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$ de L’ Hospital.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα σε κάθε γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) Ισχύει ότι: $x+yi=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $y=0$

β) Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta}[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\mu\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x′x, της γραφικής παράστασης της f

δ) Ισχύει ότι $\left(\int_0^x \eta\mu^2 t dt\right)'=\sigma\upsilon\nu^2 x$

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f , είναι διάστημα

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί z και w , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$(i-1)z = i\bar{z}(1-i) \quad (1) \quad \text{και} \quad 36i^{2014} + |w|^2 = (-w-\bar{w})Im(w) \quad (2)$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 6

Β2. Να δείξετε ότι: **α**. $z^2 + \bar{z}^2 = 0$

Μονάδες 3

β. $\left|\frac{2z}{z^2+1}\right| \leq \sqrt{2}$

Μονάδες 4

Β3. Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w, ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του |z – w|

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha<0$ και $\beta>1$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+f(x)-\sigma\upsilon\nu x}{x^4-2x} = \frac{1}{20}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Μονάδες 6

Γ3. Έστω η συνάρτηση $g(x) = (x^2+e^{10})^{\eta\mu x} - 1$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g, τέμνονται στο Ο(0,0) στο οποίο οι εφαπτόμενες τους είναι κάθετες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο D_f και ισχύει $f(0)<f(α)<f(β)<f(1)$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$, έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο (α,β).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f , δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $[f'(x)]^2 - 2f'(x) + e^x f''(x) = -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Η ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ εφάπτεται στη γραφικής της παράσταση στο (0,f(0))
- $f'(x) \neq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Η ευθεία $y=x+ln2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{4}$

Μονάδες 7

Δ2. Αν $h(x) = f'(x) - 1$ τότε να δείξετε ότι $h(x) = -\frac{e^x}{e^x+1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-\infty,0)$ τέτοιο, ώστε

$$e^{x_0} f(x_0) = συν^4 x_0 + e x_0$$

Μονάδες 6