

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1.** Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει :

$$f(x) = g(x) + c$$

Μονάδες 10

**A.2.** Τι ορίζουμε σαν εφαπτομένη της  $C_f$ , σε ένα σημείο της  $A(x_0, f(x_0))$  ;

Μονάδες 5

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$ , είναι διάστημα.

Μονάδες 2

**β.** Αν ένας μιγαδικός αριθμός δεν είναι πραγματικός, τότε είναι φανταστικός.

Μονάδες 2

**γ.** Για κάθε συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε διάστημα  $\Delta$ , ισχύει :

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

Μονάδες 2

**δ.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  και  $g(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε πάντα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$$

Μονάδες 2

**ε.** Αν το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$  μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f$ , τότε  $f''(x_0) = 0$ .

Μονάδες 2

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση  $z^2 + \gamma = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , με ρίζες τους  $z_1$  και  $z_2$ .

α. Να αποδείξετε ότι :

i. Ο αριθμός  $\gamma$  είναι πραγματικός

Μονάδες 7

ii. Αν  $\gamma = 9$  τότε  $z_1^{30} - z_2^{30} = 0$

Μονάδες 9

β. Έστω  $A$  η εικόνα, στο μιγαδικό επίπεδο, της ρίζας που έχει θετικό φανταστικό μέρος και  $B$  η εικόνα της άλλης ρίζας. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $w$ , που ο λόγος των αποστάσεών τους από τα  $A$  και  $B$  είναι ίσος με 2.

Μονάδες 9

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1

Μονάδες 5

β. Αν η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο  $-3$  και τον άξονα  $y'y$  στο  $1$ , τότε

i. Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

ii. Να λύσετε την ανίσωση  $f^{-1}(-1 + f(x^2 - 16)) \geq -3$

Μονάδες 9

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  της  $C_f$ , στο οποίο

η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = \frac{1}{3}x + 2006$ .

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $3f(x) - 2f'(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει μία ακριβώς ρίζα.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int f(x)dx$

Μονάδες 6

δ. Αν  $0 < \alpha < \beta$  και  $f(0)=0$  να δείξετε ότι  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx \leq \frac{\alpha - \beta}{3}$

Μονάδες 8

Επιμέλεια

Μπερτσιάς Κωνσταντίνος, Μαθηματικός