ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

(Επιμέλεια Θεμάτων: Μπερτσιάς Κωνσταντίνος, Καθηγητής Μαθηματικός)

ΘΕΜΑ 1°

Α.

Α.1 Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να δείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$.

Μονάδες 8

Α.2 Τι ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης *f*;

Μονάδες 7

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για να ορίζεται η gof θα πρέπει $x \in D_f$ και $g(x) \in D_f$.

Μονάδες 2

β. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει ότι |z|=|-z|.

Μονάδες 2

γ. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 2

δ. Για την ολοκλήρωση με αντικατάσταση ισχύει ότι $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$ όπου u=g(x) και du=g'(x)dx.

Μονάδες 2

ε. Αν $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = +\infty$ τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w, οι οποίοι συνδέονται με τη σχέση $w = \dfrac{z + i}{z - 2i}$.

α. Ο z είναι φανταστικός αν και μόνο αν $z = -\bar{z}$.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z, όταν ο w είναι φανταστικός αριθμός.

Μονάδες 8

γ. Έστω Μ και Μ' οι εικόνες των μιγαδικών z, που βρίσκονται στους άξονες x'x και y'y, όταν ο w είναι φανταστικός αριθμός. Να υπολογιστεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z.

Μονάδες 6

δ. Αν z = 3 - i, τότε να υπολογίσετε τον μιγαδικό $(2w)^{50}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3°

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 8\ln x + \alpha$, με $\alpha \in R$ και $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο, το οποίο και να βρεθεί.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 5

γ. Να βρεθεί το α, ώστε να ισχύει

$$\int_1^e f(x)dx = 0.$$

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 είναι αδύνατη, αν και μόνο αν $a > \ln\frac{256}{e^4}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4°

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[0,+\infty)$ τέτοια, ώστε να ισχύουν

$$f(x) = \frac{\int_0^x 2^{f(t)}dt}{2^{f(x)}} \quad \text{και} \quad f(x) \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Να δειχθεί ότι:

α. Η C_f τέμνει τον άξονα y'y σε μοναδικό σημείο.

Μονάδες 5

β. Η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 7

γ. Ισχύει $xf'(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 7

δ. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα x'x και των ευθειών x=0 και x=2, τότε $E \geq f(2)$.

Μονάδες 6