

ΑΚΑΔΗΜΟΣ

Γ.Κορδύλη 1 & Οθωνος-Μαρούσι
Τηλ. Κέντρο: 210-61.24.000, <http://www.akadimos.gr>

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ 2010-2011 Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια Θεμάτων : Μπερτσιάς Κωνσταντίνος, Καθηγητής Μαθηματικών

ΘΕΜΑ Α°

A1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει: $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$.

Μονάδες 9

A2. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα;

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και στο $x = x_0$ παρουσιάζει σημείο καμπής, τότε $f''(x_0) = 0$.

Μονάδες 2

β. Αν στο σύνολο C ισχύει $a + \beta i = 0$, τότε $a = 0$ ή $\beta = 0$.

Μονάδες 2

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 2

δ. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες, όταν ισχύει $f(x) = g(x)$.

Μονάδες 2

ε. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z ισχύει ότι: $(3 - i)z + (3 + i)\bar{z} = 12$.

B1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x+yi$ που ικανοποιούν τη παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

B2. Να δείξετε ότι ο πραγματικός αριθμός $z_1 = 2$ και ο φανταστικός αριθμός $z_2 = 6i$, είναι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

Μονάδες 8

B3. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 + 1 = \left(\frac{z_1 \bar{z}_2}{4}\right)^4$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2\sin x - \pi$, με $x \geq 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή συνάρτηση.

Μονάδες 8

Γ2. Να δείξετε ότι:

α. $f(x) \geq 2 - \pi$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$

Μονάδες 3

β. $\sin(\eta\mu x) + \sin(\sigma\upsilon\nu x) \geq \frac{3}{2}$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x) + 2\eta\mu x}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι f και g συνεχείς συναρτήσεις στο \mathbb{R} , για τις οποίες ισχύουν

$$\int_0^1 f(t)dt = 2 \quad \text{και} \quad g(x) = -\int_0^x f(t)dt \cdot \int_x^1 f(t)dt, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $g(x) = \left(\int_0^x f(t)dt - 1\right)^2 - 1.$

Μονάδες 8

Δ2. Η γραφική παράσταση της g , έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x' .

Μονάδες 6

Δ3. Υπάρχει $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $\int_0^\rho f(t)dt = 1.$

Μονάδες 6

Δ4. Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, στο $x = \rho.$

Μονάδες 5