ΑΚΑΔΗΜΟΣ

Γ.Κονδύλη 1 & Οθωνος-Μαρούσι
Τηλ. Κέντρο:210-61.24.000, http://www.akadimos.gr

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια θεμάτων : Μαρία Λαγού, Καθηγήτρια Μαθηματικών

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 10

Α.2 Πότε μία συνάρτηση f: Α→R λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν 0<α<1, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $αz^2+βz+γ=0$ με α, β, γ να ανήκουν στους πραγματικούς και $α\neq 0$, δεν είναι πραγματικές, τότε αυτές είναι συζυγείς μιγαδικοί.

δ. Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [α,β], τότε η f δεν είναι 1-1.

ε. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε δεν είναι και συνεχής στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται συνάρτηση f με $f(z)=\frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z\neq 0$.

α. Αν $|f(z)|=|f(\bar{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 7

β. Αν $|f(z)|=1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 8

γ. Αν $\mathrm{Re}(f(z))=2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z, βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^{o}

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε x που ανήκει στους πραγματικούς .

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^{o}

Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει f(0)=0 και ότι η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε x>0 υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιος ώστε $f(x)=x\cdot f'(\xi)$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{x}+e^x$, x>0 , είναι συνάρτηση

1-1 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 9

γ. Αν $h(x)=e^x+x^5+x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_1^{e-1} f(1+x)\,dx$$

Μονάδες 9