

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ 2013 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια θεμάτων: Κωνσταντίνος Μπερτσιάς

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ .

Μονάδες 10

A2. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f ;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=a+\beta i$, με $a,\beta \in \mathbb{R}$, ισχύει $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$

β. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε, το πεδίο ορισμού της $f+g$ είναι η ένωση $A \cup B$

γ. Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$,

τότε $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο (a, β) , τότε η f παίρνει στο (a, β) μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή

ε. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, με $z_2 \neq 0$, τότε ισχύει $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει ότι $z^{10} = (z+4)^{10}$ και ότι $w = a^2 - 2a + 1 + \sqrt{8} \cdot 1 - a \cdot i$, με $a \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w , είναι η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$.

Μονάδες 7

B2. Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , ανήκουν στην διευθετούσα της παραβολής.

Μονάδες 8

B3. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{|z+1|}{z+1} - \frac{z+1}{|z+1|}$, είναι φανταστικός.

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2e^x + (\lambda - 3)x^4 - 1}{1 - e^x}$, με $x < 0$ και $\lambda \geq 3$.

Γ1. Να προσδιοριστεί η τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 5

Γ2. Αν $\lambda = 3$, τότε

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της και τις ασύμπτωτες της C_f .

Μονάδες 8

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - \sin \theta = 0$, έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό θ , με $\theta \neq \text{κπ}$.

Μονάδες 5

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{1}{n^3}}^{\frac{1}{n^2}} f(x) dx$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει

$$f(x) - \ln 13 = \int_4^x \frac{(2t-4)(t^2-4t+13)+2t-4}{(t^2-4t+13)(e^{f(t)}+1)} dt, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x^2 - 4x + 13$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμψής της C_f .

Μονάδες 5

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά μεταξύ τους $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 5)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) + 8 \cdot f''(\xi_2) = 1$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση g ισχύει ότι $g^5(x) + g(x) + \ln 13 = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{4e^x - 2x^2 - 4x - 4}.$$

Μονάδες 7